Интегральное исчисление.

Часть 1. Неопределенный интеграл.

§1.Первообразная и неопределенный интеграл.

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием.**

Определение 1. ***Первообразной*** **от функции** $f(x)$ **на отрезке** $[a;b]$ **называется функция** $F(x)$**, производная которой в каждой точке отрезка равна** $f(x)$**, т.е.**

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Пример.

$$f(x) = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = x^5 \quad ;$$

$$F(x) = x^5 + 10 \quad ; \quad F(x) = x^5 - 20 \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, первообразных для данной функции $f(x)$ может быть бесчисленное множество.

Теорема. **Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.**

Доказательство: Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Докажем, что они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

По определению первообразной:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x)$$

Найдем производную разности первообразных:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ значит

$F_1(x) - F_2(x) = c \quad \Rightarrow \quad F_1(x) = F_2(x) + C$,

ч.т.д.

Вывод: прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения С, можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $\boxed{F(x) + C}$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Определение 2. **Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается**

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C},$$ где

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$;

C - постоянная интегрирования;

x – переменная интегрирования;

$\int$ - знак интеграла.

Определение 3. **Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется *интегрированием* данной функции.**

Пример. $\int 5x^4 dx = x^5 + C$; $\int 10x^9 dx = x^{10} + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

§2.Основные свойства неопределенного интеграла.

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ $\qquad$ $F'(x) = f(x)$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$$

Замечание. На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

$$dy = y'dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\boxed{\int d\left(F(x)\right) = F(x)+C}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\boxed{\int A\cdot f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx}\,,\ A\neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\boxed{\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx}$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x.

Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\boxed{\int f(u)\,du = F(u) + C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Пример. Так как $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, то

$$\int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int \left(e^x\right)^2 d\left(e^x\right) = \frac{\left(e^x\right)^3}{3} + C$$

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad \text{и т.д.}$$

Замечание. Не путать с интегралами:

$$\int \sin^2 x\,dx \quad ; \quad \int \left(e^x\right)^2 dx \quad ; \quad \int (\ln x)^2 \cdot dx$$

§3. Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \cos u du = \sin u + C$

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$

8. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$

9. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$

10. $\int \sec^2 u du = \mathrm{tg} u + C$

11. $\int \mathrm{cosec}^2 u du = -\mathrm{ctg} u + C$

12. $\int \sec u du = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

13. $\int \mathrm{cosec} u du = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$

14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{arcsec}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Замечания: 1) Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \mathrm{ctgudu} = \ln|\mathrm{sinu}| + C$$

$$\left(\ln|\mathrm{sinu}| + C\right)' = \frac{(\mathrm{sinu})'}{\mathrm{sinu}} = \frac{\mathrm{cosu}}{\mathrm{sinu}} = \mathrm{ctgu}$$

2) Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Пример. Найти интегралы по таблице:

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 100} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-10}{x+10}\right| + C \qquad -(15)$

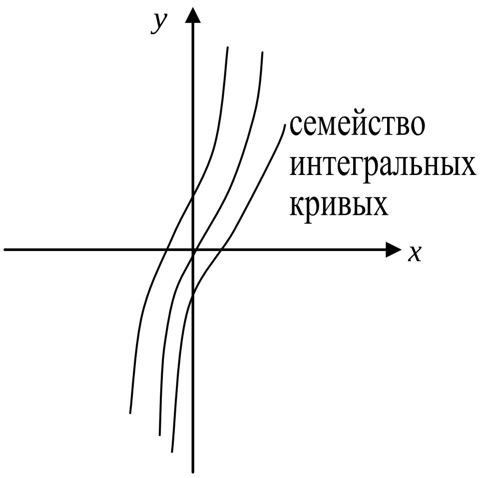
2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{9}\mathrm{arcsec}\frac{x}{9} + C \qquad -(17)$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C \qquad -(16)$

§4.Геометрический смысл неопределенного интеграла.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых вида $y = F(x) + C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Интегральные кривые получаются друг из друга, путем параллельного переноса вдоль оси ОУ.

Пример.



$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad F(x) = x^3$$

$\boxed{y = x^3 + C}$, если

$c = 0$ $\qquad y = x^3$

$c = 1$ $\qquad y = x^3 + 1$

$c = -1$ $\qquad y = x^3 - 1$ $\qquad$ и т.д.

Правило: чтобы из семейства интегральных кривых $y = F(x) + C$ выделить одну определенную кривую, нужно задать некоторые дополнительные условия для того, чтобы данная кривая, например, проходила через некоторую точку $M(x_0; y_0)$. Эти условия называются ***начальными***, т.е. при $x = x_0$; $y = y_0$.
С помощью этих условий можно найти постоянную величину С:

$$y_0 = F(x_0) + C \quad \Rightarrow \quad C = y_0 - F(x_0)$$

Пример. Выделить из предыдущего семейства кривую, проходящую через точку $A(-1;3)$.

$y = x^3 + C$. Подставим в это уравнение координаты точки *A*.

$$3 = (-1)^3 + C$$

$$C = 3 + 1$$

$$C = 4$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{y = x^3 + 4}$$

§5. Методы непосредственного интегрирования.

1.Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

Пример.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C$

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Пример.

1) $\int (3x^3 + 5x^2 - x + 2)dx = \int 3x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int x dx + \int 2dx =$
$= 3\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$

2) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx =$
$= \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

3. Непосредственное интегрирование.

3.1. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$, если $u=\varphi(x)$, то $$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

Пример.

1)

$$\int \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x\,d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$, т.к. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

2) $$\int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x dx = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$(dy = y'dx)$$

3) $$\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

3.2. Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной **а** будет выполняться равенство:

$d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот

$dx = d(x+a)$ и поэтому

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(x)\,d(x+a)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

Пример.

1) $$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

3.3. Введение под дифференциал постоянного множителя.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

Пример.

1) $\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$

3.4. Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C}$$

Пример.

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \ln\left|x^2+3x+7\right| + C$

§6. Метод подстановки.

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)\,dt \end{aligned}},\ \text{т.е.}$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = \int\frac{2tdt}{t+1} = 2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+1}&=t\\ x+1&=t^2\\ dx&=2tdt\end{aligned}\right| = 2t - 2\int\frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$

§7.Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям вызван тем, что нет формулы, позволяющей находить интеграл от произведения функции.

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(u\cdot v) = \int v\cdot du + \int u\cdot dv$$

$$uv = \int v\cdot du + \int u\cdot dv$$

$$\boxed{\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du}$$ - формула интегрирования по частям

Сущность метода: подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения 2-х множителей **u** и **dv**, затем пользуются правой частью формулы.

Как правильно выбрать **u** и **dv**:

	Вид интеграла	u	dv
I	$\int p(x)\cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x)dx$
	$\int p(x)\cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x)dx$
	$\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} x dx$	$\operatorname{arctg} x$	$p(x)dx$
II	$\int p(x)\cdot \sin ax\cdot dx$	$p(x)$	$\sin ax\cdot dx$
	$\int p(x)\cdot \cos bx\cdot dx$	$p(x)$	$\cos bx\cdot dx$
	$\int p(x)\cdot e^{\alpha x}dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x}dx$
III	$\int e^{\alpha x}\cdot \sin ax\cdot dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin ax dx$
		$\sin ax$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int e^{\alpha x}\cdot \cos bx\cdot dx$	$e^{\alpha x}$	$\cos bx dx$
		$\cos bx$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int \sin(\ln x)dx$	$\sin(\ln x)$	dx

$P(x)$ - многочлен или одночлен.

Замечание:

Интегралы III группы берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример.

1)

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u & \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{matrix} \right| =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$

$$= \underline{x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C}$$

2)

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u & \cos x dx = dv \\ 2x dx = du & \sin x = v \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \sin x - 2\left(-x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx\right) =$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C$$

3)
$$\int e^x\cdot\sin x dx=\begin{vmatrix} e^x=u & \sin x dx=dv \\ e^x dx=du & -\cos x=v\end{vmatrix}=-e^x\cos x-\int(-\cos x)\cdot e^x dx=$$

$$=-e^x\cdot\cos x+\int e^x\cdot\cos x dx=\begin{vmatrix} e^x=u & \cos x dx=dv \\ e^x dx=du & \sin x=v\end{vmatrix}=$$

$$-e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\sin x dx;$$

$$2\int e^x\cdot\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x)$$

$$\int e^x\cdot\sin x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

§8.Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Определение 1. ***Рациональной функцией*** **называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются *рациональными дробями*.**

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Пример. $R_1(x)=\frac{x^2+3x+7}{x^4+9x^3+8}$ $\quad R_2(x)=\frac{x^2+9}{x-1}$ $\quad R_3(x)=\frac{3x^2+5x+8}{x^2+2x-3}$

Определение 2. **Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя.**

$R_1(x)$ **- правильная рациональная дробь.**

Определение 3. **Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.**

$R_2(x)$, $R_3(x)$ - неправильные рациональные дроби.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. **Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.**

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}$$

Пример.

$$\frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1} = x^2+4x+5+\frac{4}{x-1}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+x-1 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+4x+5} \\
\quad -\;4x^2+x-1 & \\
\quad\quad \underline{4x^2-4x} & \\
\quad\quad\quad -\;5x-1 & \\
\quad\quad\quad\quad \underline{5x-5} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4 &
\end{array}$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует 3 типа элементарных дробей:

1. $\dfrac{A}{x-a}$ - I тип

2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ - II тип

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - III тип

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

1) Если знаменатель содержит различные линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$A-?$
$B-?$
$C-?$

2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}=$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_3}{(x-c)^3};$$

$A-?$ $B_1-?$ $B_2-?$

$C_1-?$ $C_2-?$ $C_3-?$

3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+Д}{x^2+p_2x+q_2}$$

§9.Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

1) I типа:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$$

2) II типа

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

3) III типа $(Д<0)$

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{x}{x^2+px+q}dx+B\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2}A\int\frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+B\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=\frac{1}{2}A\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}A\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

§10. Методы нахождения значений A, B, C…

§10.1 Метод неопределенных коэффициентов

Состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной х.

Простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной функции. Получится система «n» уравнений с «n» неизвестными A, B, C…, которая имеет единственное решение.

Пример. $$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}=\overset{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{\frac{A}{x-1}}+\overset{\left(x^2+2x+2\right)}{\frac{B}{(x-1)^2}}+\overset{(x-1)^2}{\frac{Cx+Д}{x^2+2x+2}}$$

$$x^2-5x+9=A\left(x^3-x^2+2x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+$$

$$+(Cx+Д)\left(x^2-2x+1\right)=\underline{Ax^3}+\underleftrightarrow{Ax^2}-2A+\underleftrightarrow{Bx^2}+\underline{\underline{\underline{2Bx}}}+2B+\underline{Cx^3}-$$

$$\underleftrightarrow{2Cx^2}+\underline{\underline{Cx}}+\underleftrightarrow{Дx^2}-\underline{\underline{\underline{2Дx}}}+Д=x^3(A+C)+x^2(A+B-2C+Д)+$$

$$x(2B+C-2Д)+(-2A+2B+Д)$$

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & \left\{\begin{array}{l} 0=A+C \\ 1=A+B-2C+Д \\ -5=2B+C-2Д \\ 9=-2A+2B+Д \end{array}\right. \\
x^2 & \\
x^1 & \\
x^0 &
\end{array}$$

Решая эту систему, получим:

$$A=-\frac{7}{5}$$

$$B=1$$

$$Д=\frac{21}{5}$$

$$C=\frac{7}{5}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=\int\frac{-\frac{7}{5}}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{5}\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{21}{5}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\int\frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+2}dx+\frac{21}{5}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{(x+2x+1)-1+2}+\frac{21}{5}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x-1)+C$$

§10.2 Метод частных значений.

Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять метод частных значений для нахождения коэффициентов A, B, C…, придавая x значения $x=a;\ x=b;\ x=c$

Пример.

$$\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

$$2x^2+10x-18=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+$$
$$+C(x-1)(x+2)$$

$x=1$	$-6=A\cdot 3(-2)$	$A=1$
$x=-2$	$-30=B(-3)(-5)$	$B=-2$
$x=3$	$30=C\cdot 2\cdot 5$	$C=3$

Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Выводы: Если под знаком интеграла стоит рациональная дробь, то:

1. Если подынтегральное выражение - неправильная рациональная дробь, то ее надо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, для чего определить значения коэффициентов А, В, С…
3. Подынтегральное выражение представить в виде суммы легко интегрируемых функций.

§11. Интегрирование тригонометрических функций.

11.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида: $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx}$

(R- рациональная функция)

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональной функции заменой переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$ - универсальная тригонометрическая подстановка.

Основываясь на формулах тригонометрии, имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(9+8\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\ t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2} \end{aligned}\right| = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{9+9t^2+8-8t^2+2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{dt}{\left(t^2+2t+1\right)-1+17} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+4^2} = 2\cdot\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{t+1}{4}+C = \underline{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{4}+C}$$

11.2. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x dx \quad ; \quad \int \cos^n x dx}$

Находят с использованием рекуррентных (возвращающихся) формул:

$$\boxed{\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x}$$

$$\boxed{\int \cos^n x \cdot dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \cdot dx + \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x}$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{4-1}{4}\int \sin^{4-2} x dx - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^{4-1} x = \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^3 x =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\int \sin^0 x \cdot dx - \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x\right) - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^3 x = \underline{\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cdot \cos x + C}$$

11.3. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx}$, где

n и **m** - целые числа, причем **одно** из них **нечетное**.

Интегралы берутся с помощью формул:

1. $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$
2. $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$
3. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
4. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Пример.

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \cdot d(\cos x) - \int \cos^8 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= \underline{-\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c}$$

11.4. Интегралы вида: $\boxed{\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx}}$,где

n и **m** – целые числа, но **оба четные**

Применяются формулы понижения степени:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}};\qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}};$$

$$\boxed{\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

Пример.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c =$$

$$= \underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\cdot \sin 4x + c}$$

11.5. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^n x dx}$,где

n и **m** – целые числа, но **отрицательные.**

Используется подстановка: $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Выведем формулы для $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; dx

1. $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ $\quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}}$

2. $\sin^2 x = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}}$$

3. $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x - \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{t'dt}{1+t^2}$ $\boxed{dx = \dfrac{dt}{1+t^2}}$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 16\cos^2 x}.$$

Пусть: $\left| \begin{array}{ll} \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & t = \operatorname{tg} x \end{array} \right|$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t)^2 \left(\dfrac{t^2}{1+t^2} + 6 \cdot \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 16 \cdot \dfrac{1}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{\left(t^2 + 6t + 9\right) - 9 - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + C =$$

$$= \underline{\frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C}$$

При помощи этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

11.6. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin nx \cdot \cos mx dx}$; $\boxed{\int \cos nx \cdot \cos mx dx}$; $\boxed{\int \sin nx \cdot \sin mx dx}$.

При интегрировании функций такого вида используются следующие формулы:

1. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$
2. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$
3. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

Пример.

$$\int \sin x \cdot \sin 11x dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(x-11x)-\cos(x+11x)\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 10x - \cos 12x\right)dx =$$

$$= \underline{\frac{1}{20}\sin 10x - \frac{1}{24}\sin 12x + C}$$

11.7. Интегралы вида: $\boxed{\int \operatorname{tg}^n x \cdot \sec^{2m} x dx}$, где

n и **m - целые** числа

При решении используются формулы:

1. $\sec^2 x dx = d(\operatorname{tg} x)$
2. $\operatorname{cosec}^2 x dx = -d(\operatorname{ctg} x)$
3. $1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
4. $1+\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Пример.

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \underline{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C}$$

11.8. Интегралы вида: $\boxed{\int \operatorname{tg}^{2m-1} x \cdot \sec^m x dx}$

Используются формулы:

1. $\sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = d(\sec x)$
2. $\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -d(\operatorname{cosec} x)$
3. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
4. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

§12. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

12.1. Тригонометрические подстановки.

1) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx}$ применяется подстановка:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad ; \quad dx = a \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad ; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

2) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx}$ $\Rightarrow$

$$x = a \cdot \sin t \quad ; \quad dx = a \cos t dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad ; \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

3) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}$

$$x = a\cdot\sec t \quad ; \quad dx = a\sec t\cdot\operatorname{tg} t\cdot d\cdot t \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sec t \quad ; \quad t = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$$

Замечание: эти подстановки не единственные. В случае (1) можно было обозначить $x = a\cdot\operatorname{ctg} t$; во (2) - $x = a\cdot\cos t$

Примеры.

1)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \left|\begin{array}{l} x = 2\operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\end{array}\right| = \int\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}tdt\cdot\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^2 t}} = \int\frac{dt\cdot\cancel{\cos t}}{\sin t\cdot\cos\cancel{^2} t\cdot 2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sin t\cdot\cancel{\cos t}\cdot\cancel{\sec t}} = \frac{1}{2}\int\operatorname{cosec} t\cdot dt = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \underline{\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{2}\right| + C}$$

2)

$$\int x^2\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\\ t=\arcsin\frac{x}{3}\end{array}\right|=\int 9\sin^2 t\cdot\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt=81\int\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{81}{4}\int 4\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt=\frac{81}{4}\int\sin^2 2t\,dt=\frac{81}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{81}{8}\int dt-\frac{81}{8}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4t\,d(4t)=\frac{81}{8}t-\frac{81}{32}\sin 4t+C=$$

$$=\underline{\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}--\frac{81}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{3}\right)+C}$$

3)

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-16}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=4\sec t\\ dx=4\sec t\cdot\operatorname{tg} t\cdot dt\\ t=arc\sec\frac{x}{4}\end{array}\right|=\int 4\sec t\cdot\sqrt{16\sec^2 t-16}\cdot 4\sec t\cdot\operatorname{tg} t\cdot dt=$$

$$=64\int\sec^2 t\cdot\operatorname{tg}^2 t\,dt=64\int\operatorname{tg}^2 t\,d(\operatorname{tg} t)=64\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}+C=\underline{\frac{64}{3}\cdot\operatorname{tg}^3\left(arc\sec\frac{x}{4}\right)+C}$$

12.2. Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного и того же аргумента.

$\boxed{\int R\left(x;x^{\alpha};x^{\beta};\ldots x^{\gamma}\right)dx}$, где α, β, γ - рациональные дроби

Такие интегралы берутся подстановкой:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t^n \quad ; \quad t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \end{array}}$$

, где **n** - наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} \cdot 6t^5 dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}} = 6\int \frac{t^2 \cdot t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^7 dt}{t^3(t-1)} = 6\int \frac{t^4 dt}{t-1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{3}; \quad \beta = \frac{2}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$n = 6$$

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$t = \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{array}{r|l} t^4 & t-1 \\ \hline -\underline{t^4 - t^3} & t^3 + t^2 + t + 1 \\ t^3 & \\ -\underline{t^3 - t^2} & \\ t^2 & \\ -\underline{t^2 - t} & \\ t & \\ -\underline{t - 1} & \\ 1 & \end{array}$$

$$= 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}\right| + C =$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C}$$

12.3. Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейных функций аргумента.

$$\boxed{\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx}$$

Используется подстановка:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^{n} \quad ; \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'dx=n\cdot t^{n-1}\cdot dt$$

$$; \quad t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ ,$$

где **n-** наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}=\int\frac{6t^{5}dt}{\sqrt{t^{6}}+\sqrt[3]{t^{6}}}=6\int\frac{t^{5}dt}{t^{3}+t^{2}}=6\int\frac{t^{5}dt}{t^{2}(t+1)}=6\int\frac{t^{3}dt}{t+1}=$$

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{1}{3}$$

$$n=6$$

$$x+2=t^6$$

$$dx=6t^5dt$$

$$t=\sqrt[6]{x+2}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;t^3 & t^2-t+1 \\
\underline{t^3-t^2+t} & \overline{t+1} \\
-\;t^2-t & \\
\underline{t^2-t+1} & \\
-1 &
\end{array}$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-kn|t+1|\right)+C=$$

$$=2\sqrt[6]{(x+2)^3}-3\sqrt[6]{(x+2)^2}+6\sqrt[6]{x+2}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x+2}-3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right|+C$$

§13. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.

$$\boxed{\int R\left(a^x\right)dx}\;;\quad \boxed{\int R\left(e^x\right)dx}$$

Интегралы такого вида берутся подстановкой:

$\boxed{a^x=t}$; прологарифмируем

$$\ln a^x=\ln t$$

$$x\cdot\ln a=\ln t$$

$$\boxed{x=\frac{\ln t}{\ln a}}\;;\quad \boxed{dx=\frac{dt}{t\cdot\ln a}}$$

Пример $\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \int \frac{\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t} \cdot \ln 3 (1+t^2)} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot arctgt + C =$

$$\left. \begin{array}{l} 3^x = t \\ x = \frac{\ln t}{\ln 3} \\ dx = \frac{dt}{t \cdot \ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} 3^x + C$$

§14 Заключительные замечания

1. Нахождение неопределенного интеграла основывается на сведении его к табличному.

Существует специальный справочник по неопределенному интегралу.

2. Если интеграл найден различными способами форма ответов будет разной, но как ранее было доказано, эти ответы отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.

Например

$$\int \frac{Sinxdx}{Cos^3 x} = -\int Cos^{-3} xd\left(Cosx\right) = -\frac{Cos^2 x}{-2} + C = \frac{1}{2Cos^2 x} + C_1$$

$$\int \frac{Sinxdx}{Cos^3 x} = \int \frac{Sinx}{Cosx} \cdot \frac{1}{Cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg} x \cdot Sec^2 xdx = \int \operatorname{tg} xd\left(\operatorname{tg} x\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

Итак

$$F_1(x)=\frac{1}{2Cos^2x}+C_1$$, а $$F_2(x)=\frac{\text{tg}^2\,x}{2}+C_2$$

$$F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{Cos^2x}+C_1-\frac{\text{tg}^2\,x}{2}+C_2=\frac{1}{Cos^2x}+C_1-\frac{1Sin^2x}{2Cos^2x}-C_2=$$

$$=\frac{1-Sin^2x}{2Cos^2x}+C_1-C_2=$$

$$=\frac{Cos^2x}{2Cos^2x}+C_1-C_2=\frac{1}{2}+C_1-C_2=C$$

3. Изложенные методы интегрирования не всегда позволяют находить неопределенный интеграл. Такие интегралы называются неберущимися и их можно вычислить только приближенными методами.

$\int\frac{Sinx}{x}dx$ - интегральный синус

$\int\frac{Cosx}{x}dx$ - интегральный косинус

$\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - интеграл Пуассона и т.д.